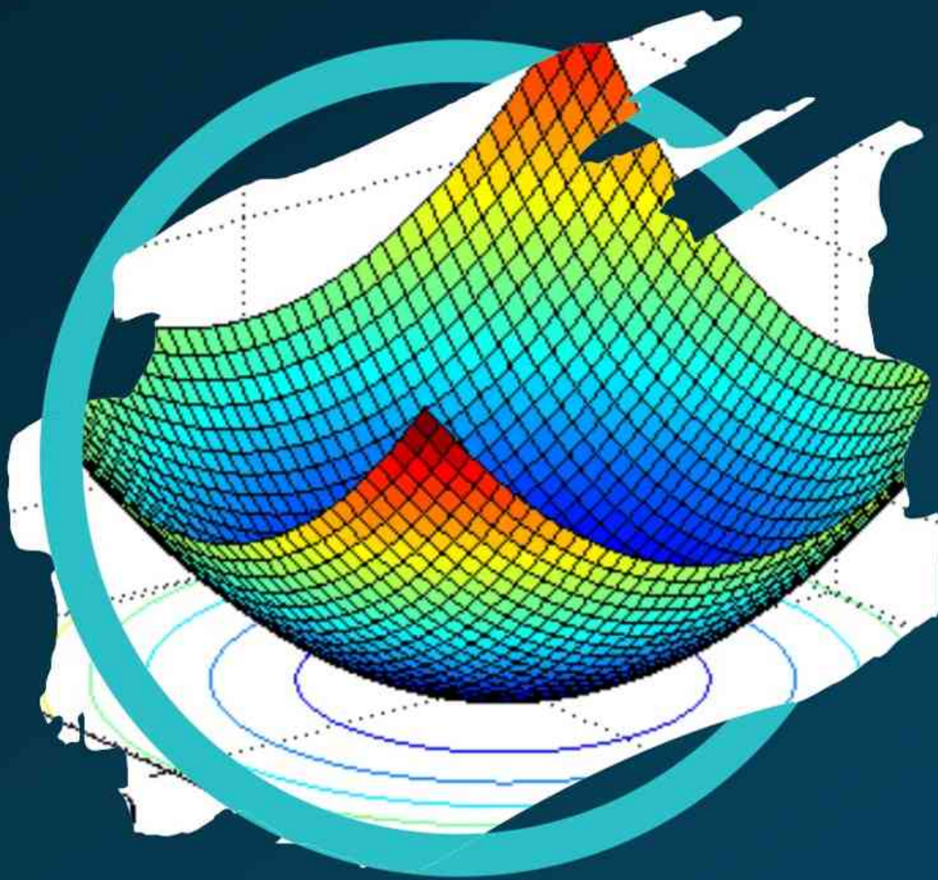
HAKI buku

by Tri Andari

Submission date: 14-Jan-2021 10:37AM (UTC+0700)
Submission ID: 1487242498
File name: Aljabar_Linear.pdf (12.16M)
Word count: 10486
Character count: 47991

ALJABAR LINEAR



Swasti Maharani, M.Pd.
Tri Andari, M.Pd.

UNIPMA Press

ALJABAR LINIER

ALJABAR LINIER

Swasti Maharani, M.P.d

Tri Andari, M.Pd.

UNIPMA Press
WE GOT IT

ALJABAR LINIER

Penulis:
Swasti Maharani, M.P.d
Tri Andari, M.Pd.

Perancang Sampul:
Swasti Maharani, M.P.d

Penata Letak:
Tri Andari, M.Pd.

Cetakan Pertama, Desember 2020

Diterbitkan Oleh:
UNIPMA Press (Anggota IKAPI)
Universitas PGRI Madiun
JI. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
Telp. (0351) 462986, Fax. (0351) 459400
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN: 978-602-0725-93-2

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan karunianya sehingga penulis mampu menyusun Buku Ajar Aljabar Linear untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa dan dosen.

Buku Ajar Aljabar Linear ini penulis susun berdasarkan Standar Kompetensi yang harus dicapai mahasiswa dan untuk menarik mahasiswa berpikir kreatif dalam menemukan konsep dalam menyelesaikan persoalan. Adapun isi buku ajar ini mencakup: Sistem persamaan linear, determinan, Vektor di R2 dan R3, Ruang Vektor dan Transformasi Linear.

Harapan penulis dengan tersusunnya Buku Ajar ini dapat turut membantu mahasiswa dalam memahami mata kuliah Aljabar Linear dan mengembangkan kreativitas berpikir mahasiswa.

Penulis menyadari bahwa penyusunan Buku ajar ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu semua kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan Buku Ajar ini sangat penulis harapkan.

Madiun, Desember 2020

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1 SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL)

Tahukah Kamu ?

Tahukah kamu bagaimana cara mencari orbit sebuah asteroid?????

Trik: Dengan Menggunakan Teorema

Sebuah sistem linier homogen yang terdiri dari sejumlah persamaan yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan yang tidak diketahui akan mempunyai pemecahan tak trivial jika dan hanya jikadeterminan dari sistem tersebut adalah nol

TEMUKAN DENGAN CARAMU SENDIRI!!!!

A. Definisi Sistem Persamaan Linear (SPL)

Sebuah persamaan linear n variabel x_1, x_2, …, x_n dapat ditulis dalam bentuk $\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$ dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta real.

Solusi persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ adalah sebuah barisan sebanyak n yaitu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ yang mana akan dipenuhi ketika kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

Himpunan semua solusi dari persamaan dinamakan himpunan penyelesaian atau solusi umum dari suatu persamaan.

Definisi

Solusi persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ adalah sebuah barisan sebanyak n yaitu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ yang mana akan dipenuhi ketika kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

Himpunan semua solusi dari persamaan dinamakan himpunan penyelesaian atau solusi umum dari suatu persamaan.

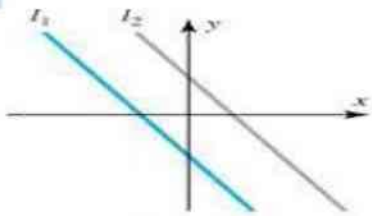
Himpunan berhingga dari persamaan linear dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dinamakan sistem persamaan linear atau sistem linear.

Barisan bilangan n $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dinamakan solusi SPL jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ merupakan solusi dari setiap persamaan dalam SPL.

- Sebagai contoh SPL

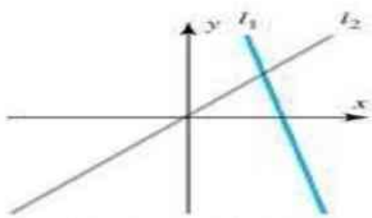
$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$
$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$

- Mempunyai solusi
  $X_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$



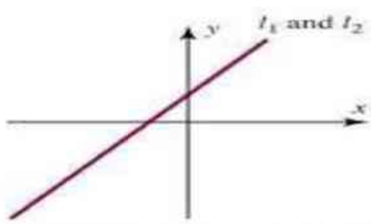
(a) No solution

Garis l_1 dan l_2 saling sejajar, yang mana pada kasus ini kedua garis tidak saling berpotongan sehingga SPL tersebut tidak mempunyai solusi.



(b) One solution

Garis l_1 dan l_2 berpotongan pada sati titik, yang mana pada kasus ini SPL tersebut mempunyai tepat satu solusi.



(c) Infinitely many solutions

Garis l_1 dan l_2 berhimpit, yang mana pada kasus ini kedua garis saling berpotongan di setiap titiknya sehingga SPL tersebut mempunyai tak hingga banyaksolusi.

B. Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear

Sebuah sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n variabel dapat dituliskan sebagai

$$\begin{array}{l} \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m} \end{array}$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan variabel, a dan b merupakan konstanata real.

Matriks Augmented

sebuah sistem persamaan linear dengan n variabel dapat dituliskan seperti dbawah ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Bentuk ini dinamakan matriks Augmented dari SPL.

Sebagai contoh, matriks augmented dari SPL berikut

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementary Row Operations

Three types of operations to eliminate unknowns:

1. Multiply an equation through by a nonzero constant.
2. Interchange two equations.
3. Add a multiple of one equation to another.

Three types of operations on the rows of the augmented matrix:

1. Multiply a row through by a nonzero constant.
2. Interchange two rows.
3. Add a multiple of one row to another row.

Example

In the following column below we solve a system of linear equations by operating on the equations in the systems

$x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

In the following column below we solve a system of linear equations by operating on the rows of the augmented matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Add -2 times the first equation to the second equation and add -3 times the first equation to the third equation to obtain

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Add -2 times the first row to the second row and add -3 times the first row to the third row to obtain

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiply the second equation by ½ to obtain

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - 7/2\, z &= -17/2 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Add -3 times the second equation to the third to obtain

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - 7/2\, z &= -17/2 \\ -- \tfrac{1}{2} z &= -3/2 \end{aligned}$$

Multiply the second row by ½ to obtain

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Add -3 times the second row to the third to obtain

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiply the third equation by -2 to obtain

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - 7/2\, z &= -17/2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Add -1 times the second equation to the first to obtain

$$\begin{aligned} x \quad + 11/2\, z &= 35/2 \\ y - 7/2\, z &= -17/2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Multiply the third row by-2 to obtain

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Add -1 times the second row to the first to obtain

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Add -11/2 time the third equation to the first and 7/2 time the third equation to the second to obtain

$$\begin{aligned} x \quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Add -11/2 time the third row to the first and 7/2 time the third row to the second to obtain

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Thus the solution of the system of linear equations is

x = 1, y = 2, z = 3.

Gaussian Elimination

Reduced Row-Echelon Form

A matrix is said to be in reduced row-echelon form, if the following properties are satisfied:

1. If a row does not consist entirely of zeros, then the first nonzero number in the row is a 1. (we call this a leading 1).
2. If there are any rows that consist entirely of zeros, then they are grouped together at the bottom of the matrix.
3. In any two successive rows that do not consist entirely of zeros, the leading 1 in the lower row occurs farther to the right than the leading 1 in the higher row.
4. Each column that consists a leading 1 has zeros everywhere else.

A matrix having properties 1, 2 and 3 is said to be in **row-echelon form**. (Thus, a matrix in reduced row-echelon form is of necessity in row-echelon form, but not conversely.)

The following matrices are in reduced row-echelon from

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The following matrices are in row-echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogeneous Linear Systems

A system of linear equations is said to be homogeneous if the constant terms are all zero, the system has the form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Every homogeneous system of linear equations is consistent, since all such systems have $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ as a solution. This solution is called the **trivial solution**, if there are other solutions, they are called **nontrivial solution**.

Example

Solve the following homogeneous system of linear equations by Gauss-Jordan eliminations.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Solution: The augmented matrix for the system is

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reducing this matrix to reduced row-echelon form, we obtain

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The corresponding system of equations is

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Thus the general solution is

$$x_1 = -s - t,\ x_2 = s,\ x_3 = -t,\ x_4 = 0,\ x_5 = t,$$

where s and t are parameters.

Note: The trivial solution is obtained when $s = t = 0$.

Theorem

A homogeneous system of linear equations with more unknowns than equations has infinitely many solutions.

In matrix notation, if $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ have the same size, then

$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ and $(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix},\ \text{and } A-B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

The expressions A+C, B+C, A-C, and B-C are undifined.

Definition

If A is any matrix and c is any scalar, then the **product** cA is the matrix obtained by multiplying each entry of A by c.

Definition

If A is an m x r matrix and B is an r x n matrix, then the **product** AB is the m x n matrix whose entries are determined as follows. To find the entry in row i and column j of AB, single out row I from the matrix A and column j from the matrix B. Multiply the corresponding entries from the row and column together and then add up the resulting products.

In matrix notation, if $A = [a_{ij}]$, then $(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

for the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

we have $2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $(-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

it is common practice to denote (-1)B by –B

if $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are matrices of the same size and $c_1, c_2, \ldots c_n$ are scalars, then an expression of the form $c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n$

is called a ***linear combination*** of $A_1, A_2, \ldots, A_n$ with ***coefficients*** $c_1, c_2, \ldots c_n$

For example, if *A*, *B*, and *C* are the matrices in the earlier Example, then

$$2A - B + \tfrac{1}{3}C \quad = 2A + (-1)B + \tfrac{1}{3}C$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

(2.4) + (6.3) + (0.5) = 26

(1.4)+(2.0)+(4.2) = 12

(1.1)-(2.1)+(4.7) = 27   AB = $\begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$

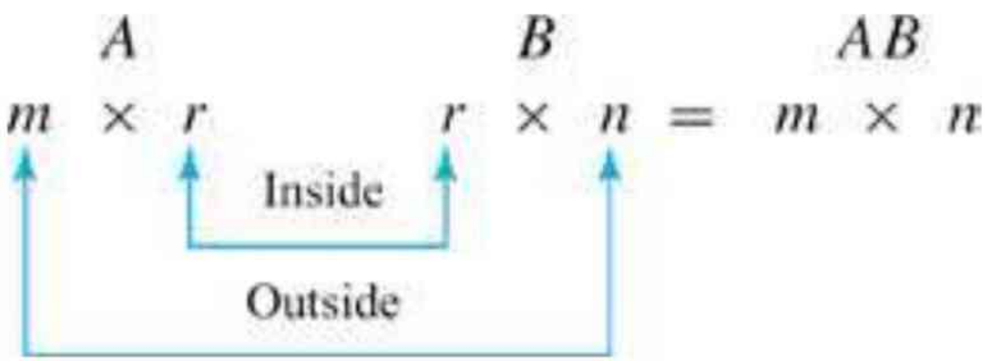
(1.4)+(2.3)+(4.5) = 30

(2.4)+(6.0)+(0.2) = 8

(2.1)-(6.1)+(0.7) = -4

(2.3)+(6.1)+(0.2) = 12

(.......)



Definition

If A is any m x n matrix, then the **transpose** of A, denoted by A^T, is defined to be the n x m matrix that results from interchanging the rows and columns of A, that is, the first column of A^T is the first row of A, the second column of A^T is the second row of A, and so forth.

Definition

If A is a square matrix, then the **trace** of A, denoted by tr(A), is defined to be the sum of the entries on the main diagonal of A. The trace of A is undefined if A is not a square matrix.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, C = [1\ \ 3\ \ 5], D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a11 & a21 & a31 \\ a12 & a22 & a32 \\ a13 & a23 & a33 \\ a14 & a24 & a34 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, D^T = [4]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$tr(A) = a_{11}+a_{22}+a_{33}$ $\qquad$ $tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$

Definition

If A is a square matrix, and if a matrix B of the same size can be found such that AB = BA = I, where I is an identity matrix, then A is said to be **invertible** and B is called an **inverse** of A.

Theorem

If B and C are both inverses of the matrix A, then B = C.

Theorem

If A and B are invertible matrices of the same size, then AB is invertible and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Theorem

If A is an invertible matrix, then

a). A^{-1} is invertible and $(A^{-1})^{-1} = A$

b). A^n is invertible and $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ for n = 1,2, …

c). For any nonzero scalar k, the matrix kA is invertible and

$(kA)^{-1} = (1/k)\, A^{-1}$.

d). A^T is invertible and $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proof: Exercise for student.

Problem 1

A square matrix A is called symmetric if $A^T = A$ and skew-symmetric if $A^T = -A$. Show that if B is a square matrix, then a). BB^T and $B + B^T$ are symmetric.

b). $B - B^T$ is skew-symmetric.

Problem 2

Let A be a square matrix.

a). Show that $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4$ if $A^5 = 0$.

b). Show that $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n$ if $A^{n+1} = 0$

Elementary Matrices and a Method for Finding A^{-1}

Definition

An n x n matrix is called an **elementary matrix** if it can be obtained from the n x n identity matrix I_n by performing a single elementary row operation

Theorem

If the elementary matrix E results from performing a certain row operation on I_m and if A an m x n matrix, then the product EA is the matrix that results when this same row operation is performed on A.

Some examples of elementary matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Example

Consider the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

And consider the elementary matrix $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Which result from adding 3 times the first row of I3 to the third row. The product EA is

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Which is precisely the same matrix that results when we add 3 times the first row of A to the third row.

Theorem

Every elementary matrix is invertible, and the inverse is also an elementary matrix.

Theorem

If A is an n x n matrix, then the following statements are equivalent, that is, all true or all false.

a). A is invertible.

b). $Ax = 0$ has only the trivial solution.

c). The reduced row-echelon form of A is I_n.

d). A is expressible as a product of elementary matrices.

Remark:

To find the inverse of an invertible matrix A, we must find a sequence of elementary row operations that reduces A to the identity and then perform this same sequence of operations on I_n to obtain A^{-1}.

Example: Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Solution

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

We added -2 times the first row to the second and -1 times the first row to the third

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

We added 2 times the second row to the third

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

We multiplied the third row by -1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

We added 3 times the third row to the second and -3 times the third row to the first

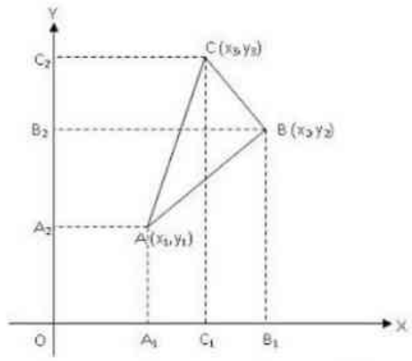
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

We added -2 times the second row to the first

Thus, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

BAB 2 DETERMINAN

Tahukah Kamu ?



Cara mencari luas segitiga di samping bisa dengan menggunakan determinan,,

Temukan jawabannya dengan caramu sendiri!!!!!!

Pada bab ini akan dibahas tetang definisi determinan, fungsi determinan, sifat-sifat determinan ,metode perhitungan determinan dengan ekspansi dan reduksi baris serta menentukan himpunan penyelesaian dengan metode *crammer*.

A. Definisi Determinan

Matriks dan determinan dipakai pada beberapa bidang pengetahuan karena peranannya dalam penyelesaian system persamaan liniear. Ada hubungan erat antara matriks dan determinan namun tidak semua matriks mempunyai determinan hanya matriks bujur sangkar yang mempunyai determinan.

Pengertian permutasi

Definisi : Permutasi *bilangan-bilangan bulat* $\{1, 2, \dots, n\}$ *adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghasilkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut.*

Jika ada matriks A berukuran *n* x *n* maka hasil kali matriks tersebut akan berbentuk : $a_{1p1}, a_{2p2} \dots. a_{npn}$

Dimana *p1,p2,...,pn* merupakan permutasi dari bilangan-bilangan 1,2,...,n. Tanda dari $a_{1p1}, a_{2p2} \dots. a_{npn}$ ditentukan dari banyaknya bilangan bulat besar yang mendahului bilangan bulat yang lebih kecil (banyaknya invers) pada bilangan *p1p2,...pn* jika banyaknya invers adalah ganjil maka tandanya negatif (-) dan jika banyaknya invers adalah bilangan genap maka tandanya positif (+).

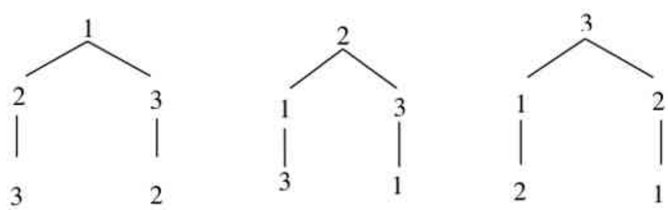
Contoh 1 : Diketahui A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tentukan banyaknya permutasi !

Ada enam permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, 3\}$. Permutasi-permutasi ini adalah

(1, 2, 3) (2, 1, 3) (3, 1, 2)

(1, 3, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)

Salah satu metode yang mudah secara sistematis mendaftarkan permutasi-permutasi adalah dengan menggunakan **pohon permutasi *(permutation tree).***



Pemutasi	Hasil kali elementer	Banyak invers	Hasil kali elementer bertanda
123	$a_{11}a_{22}a_{33}$	0	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
132	$a_{11}a_{23}a_{32}$	1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
213	$a_{12}a_{21}a_{33}$	1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
231	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
312	$a_{13}a_{21}a_{32}$	2	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
321	$a_{13}a_{22}a_{31}$	3	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

B. Fungsi Determinan

Definisi : misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan det (A) atau $|A|$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A jumlah det (A) kita namakan determinan A.

Contoh 2 : Diketahui A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tentukan nilai determinan dari A !

$$\det|A| = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Untuk matriks yang berordo lebih dari 3x3, penentuan nilai determinan dengan definisi tersebut kurang efektif dan lebih rumit berdasarkan dari definisi determinan tersebut maka dikembangkan metode perhitungan determinan yang lebih cepat.

C. Sifat-Sifat Determinan

Berikut ini adalah beberapa sifat determinan :

1) **Nilai determinan matriks A tidak berubah, jika baris diganti dengan kolom atau sebaliknnya. Jadi nilai determinan matriks A sama dengan nilai determinan matriks transpose A^t.**
   $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A^t}|$

   Misalnya: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan A^t = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

   $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ dan $|A^t| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$

   Jadi $|A| = |A^t|$

   Demikian pula jika,

   $|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ dan $|A^t| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

   $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

   $|A^t| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$

   Jadi $|A| = |A^t|$

2) **Jika setiap elemen dari baris atau kolom matriks A adalah nol, maka $|A| = 0$**

Bukti:

Misalkan elemen baris ke i atau kolom ke j semuanya nol. Maka setiap $a_1 j_1 \ \ a_2 j_2 \ \ a_3 j_3 \ldots \ a_n j_n$ akan membuat satu elemen dari baris ke i atau kolom ke j.

Berarti $a_1 j_1 \ \ a_2 j_2 \ \ a_3 j_3 \ \ldots \ a_n j_n = 0$ dan begitu pula suku-suku yang lain. Jadi jumlah semua sukunya adalah nol.

3) **Jika 2 baris atau 2 kolom matriks A semua elemennya sama maka $|A| = 0$**

Bukti:

Misalkan A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Maka $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{21} -$

$a_{11}a_{23}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{23}$

$= a_{11}a_{22}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{22} + a_{12}a_{23}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{23} +$

$a_{13}a_{21}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{21}$

$= 0$

4) **Jika matriks bujur sangkar mempunyai dua baris yang sebanding, maka determinannya sama dengan nol.**

Contoh :

$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ Karena baris pertama dan kedua sebanding yaitu 1 : 2

maka det (A) = 0.

5) **Apabila setiap elemen suatu baris atau kolom dari matriks A dikalikan dengan skalar k maka nilai determinannya menjadi k A.**

Sebaliknya apabila setiap elemen suatu baris atau suatu kolom mempunyai faktor k maka determinannya mempunyai faktor k pula.

Bukti:

$$\text{Misalkan A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{k A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$|k\,A| = a_{11}.k\,a_{22}.a_{33} + k\,a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.k\,a_{32} - a_{13}.k\,a_{22}.a_{31} -$

$a_{11}.a_{23}.k\,a_{32} - k\,a_{12}.a_{21}.a_{33}$

$= \text{k}\,(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$

$= \text{k}\,|A|$

6) **Jika ada baris atau kolom yang berdekatan dari matriks A dipertukarkan sehingga menjadi matriks B maka $|B| = -|A|$**
Bukti 1:

$$\text{Misalkan A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks B diperoleh dari matriks A dengan menukar elemen-elemen baris ke 1 dan elemen-elemen baris ke 2.

$$\text{B} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$

$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$= a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{23}a_{11}a_{32} - a_{23}a_{12}a_{31} -$

$a_{21}a_{13}a_{32} - a_{12}a_{11}a_{33}$

$= -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} +$

$a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}$

$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$

$a_{11}a_{13}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$

$= -|A|$

Jadi $|B| = -|A|$

Bukti 2:

Misalkan A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Matriks B diperoleh dari matriks A dengan menukar elemen-elemen kolom ke 1dan elemen-elemen kolom ke 3.

B = $\begin{bmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}$

B = $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$

$= a_{23}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{23} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} -$

$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31}$

$= - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} +$

$a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}$

$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$

$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$

$= -|A|$

Jadi $|B| = -|A|$

7) **Suatu determinan matriks A tidak berubah nilainya jika salah satu baris atau salah satu kolomnya ditambah k kali baris atau kolom lainnya.**
Bukti:
Ambil matriks bujur sangkar ordo 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Misalkan elemen baris pertama ditambah dengan k kali elemen baris ketiga, maka elemen baris pertama menjadi $a_{11} + k\,a_{31}$, $a_{12} + k\,a_{32}, a_{13} + k\,a_{33}$

Matriks yang diperoleh adalah

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} + k\,a_{31} & a_{12} + k\,a_{32} & a_{13} + k\,a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$

$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

$|B| = (a_{11} + k\,a_{31})\,a_{22}a_{33} + (a_{12} + k\,a_{32})a_{23}a_{31} + (a_{13} + k\,a_{33})a_{21}a_{32} -$

$(a_{13} + k\,a_{33})\,a_{22}a_{31} - (a_{11} + k\,a_{31})a_{23}a_{32} - (a_{12} + k\,a_{32})a_{21}a_{33}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + ka_{31}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + ka_{32}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$

$ka_{33}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - ka_{33}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - ka_{31}a_{23}a_{32} -$

$a_{12}a_{21}a_{33} - ka_{32}a_{21}a_{33}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$

$a_{12}a_{21}a_{33} + (ka_{31}a_{22}a_{33} + ka_{32}a_{23}a_{31} + ka_{33}a_{21}a_{32} -$

$- ka_{33}a_{22}a_{31} - ka_{31}a_{23}a_{32} - ka_{32}a_{21}a_{33})$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$

$a_{12}a_{21}a_{33}$

$= |A|$

Jadi $|B| = |A|$

8) **Jika elemen baris atau kolom ke i matriks A merupakan penjumlahan n suku, maka A dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari n determinan yang semua berbeda dengan determinan A pad baris atau kolom ke i.**

Misalnya:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 + q_1 + r_1 & p_2 + q_2 + r_2 & p_3 + q_3 + r_3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

9) **Jika A dan B matriks bujur sangkar ordo n maka $|AB|$**

Hal ini dapat ditunjukkan dengan mengambil determinan bujur sangkar ordo 2 sebagai berikut:

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

Maka :

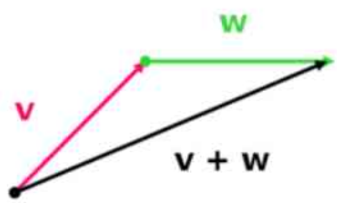
$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

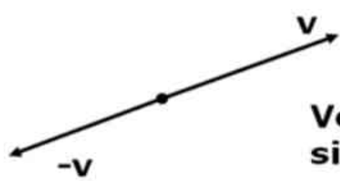
Jika **v** dan **w** adalah dua vektor sebarang, maka jumlah **v** dan **w** adalah vektor yng ditentukan sebagai berikut :

- Letak vektor **w** sedemikian sehingga titik permulaannya bertautan dengan titik terminalnya.
- Vektor **v** + **w** disajikan oleh panah dari titik permulaan v k titik terminal **w**.



$$\boxed{\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}}$$

- Vektor yang panjangnya nol disebut vektor nol dan dinyatakan dengan 0.
- Jika **v** adalah sebarang vektor tak nol, maka **–v negatif dari v,** didefinisikan sebagai vektor yang besarnya sama dengan v, tapi **arahnya terbalik.**

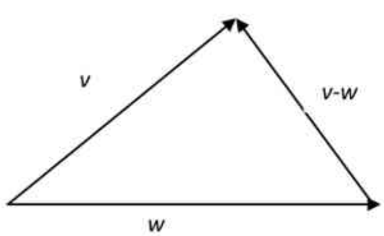


Vektor ini mempunyai sifat :

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Jika v dan w adalah ua vektor sebarang, maka selisih w dan v didefinisikan sebagai :

$$\boxed{v\text{-}w = v + (\text{-}w)}$$



Jika v adalah suatu vektor tak nol dan k adalah suatu bilangan real tak nol (skalar), maka hasil kali kv didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang v dan arahnya sama dengan arah v jika $k > 0$ dan berlawanan arah dengan v jika $k < 0$. Kita definisikan $kv = 0$ jika $k = 0$ atau $v = 0$.

B. Vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3

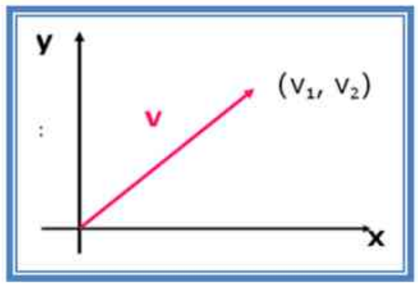
Vektor-vektor dalam sistem koordinat

- Vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 (bidang)
  Koordinat v_1 dan v_2 dari titik permulaan v disebut komponen v, dan kita tuliskan :

$v = (v_1, v_2)$

contoh :

misalkan $\mathbf{v} = (-2, 1)$ dan $\mathbf{w} = (1, 3)$, maka:



$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (-2, 1) + (1, 3) = (-2+1, 1+3)$

$= (-1,4)$

$2\mathbf{v} = 2(-2, 1) = (2.(-2) = (-4, 2)$

$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (-2, 1) - (1, 3) = (-2-1, 1-3)$

$=(-3, -2)$

$\mathbf{w} - \mathbf{v} = (1, 3) - (-2, 1) = (1-(-2), 3-1) = (3, 2)$

Jika vektor P_1P_2 mempunyai titik permulaan $P_1(x_1,y_1)$ dan titik terminalnya $P_2(x_2,y_2)$, maka $P_1P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

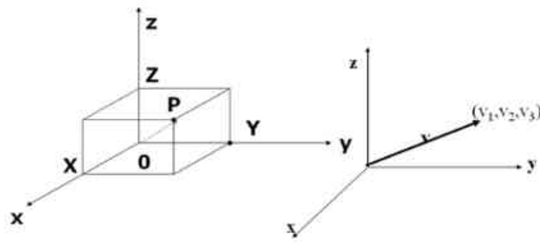
Contoh :

Diketahui $v = P_1P_2$, dengan titik permulaan $P_1(2,4)$ dan titik terminalnya $P_2(5,-6)$, tentukan vektor P_1P_2

Jawab :

$P_1P_2 = (5-2,-6-4) = (3,-10)$

- Vektor-vektor dalam ruangan berdimensi 3 (Ruang)
  Koordinat v_1, v_2, dan v_3 dari titik permulaan v disebut komponen v, dan kita tuliskan :



$v = v_1, v_2, v_3$

Contoh :

Misalkan v = (1, -3, 2) dan w =(4, 2, 1) maka :

v + w = (5, -1, 3)

2v = (2, -6, 4)

-w = (-4, -2, -1)

v – w = v + (-w) = (-3, -5, 1)

jika vektor P_1P_2 mempunyai titik permulaan $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan titik terminal $P_2(x_2,y_2,z_2)$, maka

$P_1P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2, z_1)$

Contoh :

Diketahui v = P_1P_2 , dengan titik permulaan $P_1(2, -1, 4)$ dan titik terminalnya $P_2(7, 5, -8)$, tentukan vektor P_1P_2

Jawab :

$P_1P_2 = (7-2, 5+1, -8-4) = (5, 6, -12)$

C. Norma Vektor

Teorema 1. Jika u, v, dan w adalah vektor – vektor di dalam ruang -2 atau ruang -3 dan k dan l adalah skalar, maka hubungan yang berikut akan berlaku.

1. u + v = v + u
2. (u + v) + w = u + (v + w)
3. u + 0 = 0 + u = u
4. u + (-u) = 0
5. k (l u) = (kl) u
6. k (u+v) =k u + k v
7. (k + l) u = k u + l u
8. 1 u = u

- Norma dari **v** disebut juga panjang vektor **v** dan dinyatakan dengan **||v||**
  Untuk ruang berdimensi 2
  v = (v_1, v_2) **||v||** = $\sqrt{v1^2 + v2^2}$
  untuk rung berdimensi 3
  v = (v_1, v_2, v_3) **||v||** = $\sqrt{v1^2 + v2^2 + v3^2}$

Bila terdapat $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ yang merupakan dua titik dalam ruang berdimensi-2, maka *jarak* (d) antar kedua titik tersebut adalah

$P_1P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$

Bila terdapat $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan $P_2(x_2,y_2,z_2)$ yang merupakan dua titik dalam ruang berdimensi-3, maka *jarak* (d) antara kedua titik tersebut adalah

$P_1P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} + (z2 - z1)^2$

Contoh :

1. Hitunglah norma v atau vektor v bila
   a. v = (3,4)
      ||v|| = $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
   b. v = (-3, 2, 1)
      ||v|| = $\sqrt{-3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
2. hitunglah jarak diantara P_1 dan P_2
   a. $P_1(2,3)$, $P_2(4,6)$
      $d = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{13}$
   b. $P_1(2,-1,-5)$, $P_2(4,-3,2)$
      $d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

Contoh

1. Tinjaulah vektor-vektor u=(2,-1,1) dan v=(1,1,2). Carilah **u.v** dan tentukan sudut θ diantara u dan v
   u.v = $u_1+v_1 + u_2+v_2 + u_3+v_3$ = (2)(1)+(-1)(1)+(1)(2) = 3
   juga **||u||** = **||v||** = $\sqrt{6}$ sehingga

   $\cos\theta = \frac{u.v}{||u||\,||v||} = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

Teorema 2. Misalkan u dan v adalah vektor-vektor di dalam R^2 atau R^3.

a. $v.v = ||v||^2$
b. jika **u** dan **v** masing-masing tidak nol dan θ adalah sudut antara kedua vektor tersebut, maka
   θ adalah sudut lancip jika hanya jika **u.v** > 0
   θ adalah sudut tumpul jika hanya jika **u.v** < 0
   θ adalah sudut siku-siku jika hanya jika **u.v** = 0

Teorema 3. Misalkan u,v, dan w adalah vektor-vektor didalam R^2 atau R^3 dan k adalah skalar, maka

a. u.v = v.u
b. u. (v+w) = u.v + u.w
c. k(u.v) = (ku). v = u. (kv)
d. v.v > 0 jika v $\neq$ 0 dan v.v = 0 jika v = 0

Vektor-vektor ortogonal

- vektor-vektor yang tegak lurus disebut dengn vektor0vektor ortogonal.
- Dua vektor u dan v ortogonal (tegak lurus) jika dan hanya jika uv = 0.
- Untuk menunjukkan bahwa u dan v adalah vektor-vektor yang ortogonal maka kita tuliskan u $\perp$ v

D. Proyeksi Ortogonal

- Jika u dan v dalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 atau 3 dan jika v $\neq$ 0,

  Maka : $w_1 = \frac{u.v}{||v||2}$ .V   Proyeksi ortogonal dari u pada v

  $w_2 = u - \frac{u.v}{||v||2}$ .V Komponen dari u yang ortogonal kepada v

Contoh :

Vektor-vektor u = (2,-1,3) dan v = (4,-1,2)

Kareena u.v = (2)(4)+(-1)(-1)+(3)(2) = 15

Dan $||v||^2 = 4^2+(-1)^2+2^2 = 21$

Maka proyeksi ortogonal dari u pada v adalah

$W_1 = \frac{u.v}{||v||2} .V = \frac{15}{21}(4,-1,2) = (\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7})$

Komponen dari u yang ortogonal kepada v adalah

$W_2 = u - W_1 = (2,-1,3) - (\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}) = (\frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7})$

E. Hasil Kali Silang Vektor

- Jika hasil kali titik berupa suatu skalar maka hasil kali silang berupa suatu vektor.
- Jika $u = (u_1,u_2,u_3)$ dan $v = (v_1,v_2,v_3)$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimesi 3, maka hasil kali silang u x v adalah vektor yang didefinisikan sebagai

  $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3,v_1 - u_1,v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

  atau dalam notasi determinan

  $m \times v = (\left| \quad \right| ,- \left| \quad \right| ,- \left| \quad \right|)$

  contoh :

  carilah u x v, dimana u = (1,2,-2) dan v(3,0,1)

  pemecahan $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

  $$u \times v = (\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ,- \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix})$$
  $$= (2,-7,-6)$$

Teorema 4 : jika u dan v adalah vektor-vektor di R^2, maka :

a. $U.(uxv) = 0$
b. $V.(uxv) = 0$
c. $\|u.v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2$ (identitas langlange)

Teorema 5. Jika u, v dan w adalah vektor-vektor di R^3, k sebarang skalar, maka :

a. uxv = -(vxu)
b. ux(v+w) = (uxv) + (uxw)
c. (u+v) x w = (uxw) = (vxw)
d. k (uxv) = (ku)xv = ux(kv)
e. u x 0 = 0 x u = 0
f. u x u = 0

Hasil kali silang u dan v dapat dinyatakan pula sebagai :

$$uxv = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u2 & u3 \\ v2 & v3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u1 & u3 \\ v1 & v3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u1 & u2 \\ v1 & v2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

Dimana i,j dan k disini merupakan vektor satuan

Contoh :

Jika u=(1,2,-2) dan v=(3,0,1) maka

$$uxv = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2i - 7j - 6k$$

Jika norma vektor mempunyai tafsiran geometri sebagai panjang suatu vektor, maka norma uxv jug mempunnyai tafsiran geometri khas.

Dari identitas Lagrange **$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2$**

dan definisi **$u.v = \|u\|\ \|v\| \cos\theta$** dengan $\boldsymbol{\theta}$ menyatakan besar sudut antara u dan v, maka

$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2\theta$

$= \|u\|^2\|v\|^2 (1 - \cos^2\theta)$

$= \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2\theta$

Sehingga diperoleh

$\|u \times v\| = \|u\|\ \|v\| \sin\theta$ jika digambarkan, v $\sin\theta$ adalah tinggi jajaran genjang dengan sisi u dan v. Ini berarti uxv menyatakan luas jajaran genjang tersebut

Contoh :

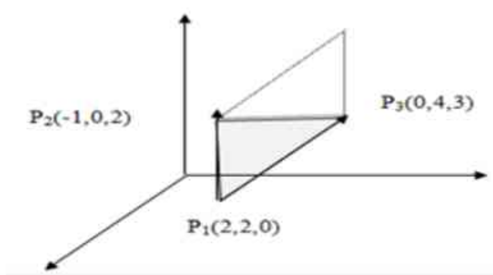
Carilah luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik $P_1(2,2,0)$, $P_2(-1,0,2)$ dan $P_3(0,4,3)$

Pemecahan. Luas A dari segitiga tersebut adalah $1/2$ luas jajaran genjang yamg ditentukan oleh vektor-vektor P_1P_2 dan P_1P_3

Dengan menggunakan metode yang dibicarakan maka $P_1P_2 = (-3,-2,2)$ dan P_1P_3 $(-2,2,3)$. Jelas bahwa $P_1P_2 \times P_1P_3 = (-10,5,10)$

Dan sebagai konsekuensinya maka :

$A = 1/2 \| P_1P_2 \times P_1P_3\| = 1/2 \times 15 = \frac{15}{2}$



BAB 4 RUANG VEKTOR

Forum Diskusi ?

U himpunan semua matriks 2X2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat a=0 dan d=0.

Tunjukkan bahwa U merupakan sub ruang dari ruang vektor matriks 2X2

pada operasi yang biasa di matriks 2X2 !!

TEMUKAN DENGAN CARAMU SENDIRI !!!!

A. Definisi Ruang Vektor

Ruang vektor adalah kumpulan vektor yang tertutup di bawah operasi-operasi penjumlahan dan perkalian dengan sebuah skalar.

Ruang-n Euclides

Pada saat pertama kali vektor dikembangkan sekitar abad ke-17, hanya dikenal vektor-vektor di R^2 dan R^3 saja tetapi dalam perkembangannya yakni menjelang akhir abad ke-19, ternyata didapatkan permasalahan yang lebih kompleks sehingga dikembangkan vektor-vektor di ruang berdimensi 4,5 atau secara umum merupakan vektor-vektor di R^n. Pada saat dikenal bahwa kuadrupel bilangan (a_1,a_2,a_3,a_4) dapat ditinjau sebagai titik pada ruang berdimensi 4, kuintupel (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)sebagai titik di ruang berdimensi 5, dan seterusnya.secara geometris kita hanya bisa menggambarkan vektor- vektor di R^3. Untuk vektor-vektor di R^4 dan seterusnya belum bisa digambarkan secara geometris, tetapi dasar yang digunakan seperti operasi-operasi vektor masih sama seperti operasi pada vektor di R^2 dan R^3. Orang yang pertama kali mempelajari vektor-vektor di R^n adalah Euclides sehingga vektor-vektor yang berada di R^n dikenal sebagai vektor Euclides, sedangkan ruang vektornya disebut ruang-n Euclides.

Definisi: Jika n adalah bilangan bulat positif, maka tupel-n-terorde (ordered-n-tuple) adalah sebuah urutan n bilangan real ($a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$). Himpunan semua tupel-n-terorde dinamakan ruang-n dinyatakan dengan R^n.

Perhatikan beberapa kekhususan berikut. Untuk $n = 2$, biasanya kita menggunakan istilah pasangan terorde bukannya tupel-2-terorde. Dan untuk $n = 3$ kita sebut dengan triple teorde bukan tupel-3-terorde. Kemudian bila $n = 1$, setiap tupel-n-terorde terdiri dari satu bilangan real, sehingga R^1 dapat dilihat sebagai himpunan bilangan real dan biasanya dituliskan sebagai R bukan R^1.

Simbol (a_1, a_2, a_3) mempunyai dua tafsiran geometrik yang berbeda. Simbol tersebut dapat ditafsirkan sebagai sebuah titik, dengan a_1, a_2, dan a_3 adalah koordinat atau dapat juga ditafsirkan sebagai sebuah vektor, dengan a_1, a_2, dan a_3 adalah komponen-komponen. Oleh karena itu, tupel-n-terorde ($a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$) dapat ditinjau sebagai titik yang digeneralisasi maupun sebagai vektor yang digeneralisasi.

Operasi-operasi baku pada R^n

Misalkan u= ($u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$) dan v= ($v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$) pada R^n.

1) u dan v dikatakan sama jika $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ..., $u_n = v_n$
2) penjumlahan u dan v didefinisikan oleh:
   $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots\ldots, u_n + v_n)$
3) perkalian skalar yakni perkalian u dengan sembarang skalar didefinisikan oleh:
   $ku = (ku_1, ku_2, \ldots\ldots, ku_n)$

dengan mendefinisikan vektor nol pada R^n sebagai $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ dan negatif dari u sebagai $-u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$, kita dapat mendefinisikan pengurangan atau selisih vektor pada R^n sebagai berikut:

$v - u = v + (-u) = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \ldots\ldots v_n - u_n)$

contoh:

misalkan u = (1, -2, 3, 5) dan v = (2, -1, 1, -4) vektor-vektor di R^4 yang memenuhi persamaan u + 2v = w, maka vektor w adalah:

w = (1, -2, 3, 5) + 2(2, -1, 1, -4) = (5, -4, 5, -3)

Teorema 4.1

sifat-sifat operasi vektor pada ruang berdimensi n

jika $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dan $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ adalah vektor-vektor pada R^n, k dan l adalah skalar, maka:

a. $u + v = v + u$
b. $u + (v + w) = (u + v) + w$
c. $u + 0 = 0 + u = u$
d. $u + (-u) = 0$, yaitu $u - u = 0$
e. $k(lu) = (kl)u$
f. $k(u + v) = ku + kv$
g. $(k + l)u = ku + lu$
h. $lu = u$

Hasil kali dalam euclides (*euclides inner product*)

jika $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ adalah sembarang vektor pada R^n, maka hasil kali dalam euclides $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$

contoh

misalkan $u = (1, 2, 3, 4, 5)$ dan $v = (-2, 1, 3, 5, -4)$ vektor-vektor di R^5, maka hasil kali dalam ecluidis dari vektor-vektor tersebut adalah:

$u \cdot v = (1)(-2) + (2)(1) + (3)(3) + (4)(5) + (5)(-4) = 9$

ruang vektor R^n dengan operasi-operasi penjumlahan, perkalian skalar dan hasil kali dalam eucluidis dinamakan ruang berdimensi n eucluidis (euclidean n-space).

Teorema 4.2

Sifat-sifat hasil kali dalam euclides

Jika u, v dan w adalah vektor pada R^n dan k adalah sembarang skalar maka:

a. $u \cdot v = v \cdot u$
b. $(u + v)w = u \cdot w + u \cdot w$
c. $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$
d. $v \cdot v \geq 0$. Selanjutnya, $v \cdot v = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$.

Disini akan dibuktikan bagian a dan d

Bukti:

a. misalkan $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ maka:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1v_1 + u_2u_2 + ... + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + ... + v_nu_n \\ &= v \cdot u \end{aligned}$$

b. jelas bahwa $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 \geq 0$.
Selanjutnya, kesamaan $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 = 0$ berlaku jika dan hanya jika: $v_1 = v_2 = ... = v_n = 0$ dengan kata lain $v = 0$.

Sifat-sifat hasil kali dalam euclides ternyata sangat mirip dengan sifat-sifat perkalian bilangan real. Contoh berikut menjelaskan penggunaan teorema 2 di atas.

Contoh

$$\begin{aligned}(u + 3v) \cdot (2u + v) &= u \cdot (2u + v) + (3v) \cdot (2u + v) && \text{(bagian b)}\\ &= u \cdot 2u + u \cdot v + (3v) \cdot (2u) + (3v) \cdot v && \text{(bagian b)}\\ &= 2(u \cdot u) + u \cdot v + 6(v \cdot u) + 3(v \cdot v) && \text{(bagian c)}\\ &= 2(u \cdot u) + 7(u \cdot v) + 3(v \cdot v) && \text{(bagian a)}\end{aligned}$$

Panjang dan jarak pada R^n

Panjang atau norma (*euclidean norm* atau *euclidean length*) dari vektor $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ pada R^n didefinisikan sebagai:

$$\|u\| = (u \cdot u)^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$$

Dan, jarak antara dua titik $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ pada R^n didefinisikan sebagai:

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

contoh

misalkan $u = (1, -1, -3, 3, 0)$ dan $v (-2, 1, 1, 3, -3)$ vektor-vektor di R^5, maka:

$$\|u\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (3)^2 + (0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Dan

$$d(u,v) = \sqrt{\left(1-(-2)\right)^2 + (-1-1)^2 + (-3-1)^2 + (3-3)^2 + \left(0-(-3)\right)^2}$$

$$= \sqrt{38}$$

B. Ruang Vektor Umum

Sepuluh aksioma mengenai ruang vektor umum yang berguna untuk menjadi pedoman dalam melakukan operasi aljabar pada vektor.

Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dan objek-objek sembarang, dimana operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar disefinisikan.

- Operasi penjumlahan (addition) dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek **u** dan **v** pada V dengan suatu objek $\mathbf{u}+\boldsymbol{v}$,yang disebut jumlah(sum) dari **u** dan **v.**
- Operasi perkalian skalar (scalar multiplication),dapat diartikan sebagai suatu aturan yamh mengasosiasikan setiap skalar k dan setiap objek **u** pada V dengan suatu objek $k\mathbf{u}$,yang disebut kelipatan skalar (scalar multiple) dari **u** oleh k.

Jika **aksioma-aksioma** berikut dipenuhi oleh semua objek **u,v,w** pada V dan semua skalar k dan l,maka dapat menyebut V sebagai ruang vektor (*vector space*) dan menyebut objek-objek pada V sebagai vektor.

(1). Jika u dan v adalah objek-objek pada V,maka u + v berada pada V

(2). $u + v = v + u$

(3). $u + (v + w) = (u + v) + w$

(4). Terdapat suatu objek 0 di V,yang disebut vektor nol (zero vector) untuk V,sedemikian rupa sehingga $0+u = u + 0 = u$ untuk semua u pada V

(5). Untuk setiap u di V,terdapat suatu objek –u di V,yang disebut sebagai negatif u,sedemikian rupa sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$

(6). Jika k adalah sembarang skalar dan u adalah sembarang objek di V,maka ku berada di V

(7). $k(u + v) = ku + kv$

(8). $(k + l)u = ku + lu$

(9). $k(lu) = (kl)(u)$

(10). $1u = u$

Skalar dapat berupa bilangan real atau bilangan kompleks,tergantung pada aplikasinya. Ruang vektor dimana skalar-skalarnya adlah bilangan kompleks disebut ruang vektor kompleks (*complex vektor space*), dan ruang vektor dimana skalar-skalarnya merupakan bilangan real disebut ruang vektor real (*real vektor space*).

Objek apa saja dapat menjadi suatu vektor,operasi penjumlahan,dan perkalian skalar,kemungkinan tidak memiliki hubungan atau kemiripan apapun dengan operasi-operasi vektor standar pada "R",asalkan sepuluh aksioma ruang vektor terpenuhi.

Contoh :

Ruang vektor matriks 2×2

Tunjukkan bahwa himpunan V dari semua matriks 2×2 dengan entri-entri real dalah suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor disefinisikan sebagai perkalian skalar.

Penyelesaian:

Pada contoh ini,kita akan mengetahui mudahnya membuktikan aksioma-aksioma dengan urutan sebagai berikut: 1,6,2,3,7,8,9,4,5,dan 10. Misalkan:

$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$

Untuk membuktikan Aksioma 1,kita harus menunjukkan bahwa $u + v$ adalah objek di V. Atau dengan kata lain,maka harus menunjukkan bahwa $u + v$ adalah matriks 2×2. Hal ini dapat diperoleh dan definisi penjumlahan matriks,karena:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + & v_{11} & u_{12} + & v_{12} \\ u_{21} + & v_{22} & u_{22} + & v_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan cara serupa, Aksioma 6 juga berlaku,karena untuk bilangan real sembarang k kita memperoleh:

$$ku = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

Sehingga ku adalah matriks 2×2 dan yang berarti merupakan objek di V. Aksioma 2 sesuai dengan Teorema 1a,karena:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = v + u$$

Demikian juga Aksioma 3 sesuai dengan bagian (b) dari teorema tersebut dan Aksioma 7,8,dan 9 berturut-turut sesuai dengan bagian (h),(j),dan (1).

Untuk membuktikan aksioma 4,harus menentukan suatu objek 0 di V sedemikian rupa sehingga $0 + u = u + 0 = u$ untuk semua u di V.

Ini dapat dilakukan dengan mendefinisikan 0 sebagai

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Yakni matriks nol, dengan definisi ini maka:

$$0 + u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

Dan demikian juga $u + 0 = u$. Untuk membuktikan aksioma 5,kita harus menunjukkan bahwa setiap objek u di V memiliki bentuk negatif –u sedemikian rupa sehingga:

$u + (-u) = 0$ dan $(-u) + u = 0$

Ini dapat dilakukan dengan mendefinisikan negatif u sebagai:

$$-u = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan definisi tersebut kita peroleh:

$$u + (-u) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} - & u_{11} & u_{12} - & u_{12} \\ u_{21} - & u_{21} & u_{22} - & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dan demikian juga $(-u) + u = 0$. Akhirnya ,Aksioma 10 merupakan perhitungan yang sederhana sebagai berikut:

$$lu = l\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

Dengan demikian,matriks berordo 2 merupakan suatu ruang vektor.

Contoh:

Sebuah Bidang yang Melewati Titik Asal adalah Ruang Vektor

Misalkan V adalah sembarang bidang yang melewati titik asal pada R^n. Akan ditunjukan bahwa titik-titik di V membentuk suatu ruang vektor di bawah operasi penjumlahan dan perkalian skalar baku untuk vektor-vektor pada R^3. Jadi, aksioma 2,3,7,8,9, dan 10 berlaku

Contoh: Tentukan hasil ortonormal S = {v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, -1)} terhadap hasil kali dalam <a, b> =2a_1b_1 + 4a_2b_2 + 2a_3b_3.

Penyelesaian:

$$1.\ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2.1.1 + +4.0.0 + 2.1.1}} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$2.\ u_2 = \frac{v_2 - < v_2, u_1 > u_1}{\|v_2 - < v_2, u_1 > u_1\|} \qquad < v_2\ , u_1 > = 2\,.0.\frac{1}{2} + 4\,.1\,.0 + 2.0.\frac{1}{2} = 0$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{2\cdot 0\cdot 0 + 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0}} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$3.\ u_3 = \frac{v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2}{\|v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2\|}$$

$$< v_3, u_1 >= 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + 4\cdot 0\cdot 0 + 2(-1)\frac{1}{2} = 0$$

$$< v_3, u_2 >= 2\cdot 1\cdot 0 + 4\cdot 0\cdot \frac{1}{2} + 2(-1)0 = 0$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{21\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot(-1)\cdot(-1)}} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Jadi, basis ortonormalnya adalah $\left\{u_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), u_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), u_3 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

BASIS ORTONORMAL ; PROSES GRAM-SCHMIDT

BASIS ORTONOMAL

- DEFINISI

BASIS ORTONOMAL

- MENORMALISASIKAN VEKTOR

BASIS ORTONOMAL

- TEOREMA TEOREMA

Jika $S = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam V, dan u adalah sebarang vektor dalam V, maka

$$U = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Contoh :

Misalkan $v_1 = (0, 1, 0)$ $v_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ $v_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$

mudah untuk memeriksa bahwa $S=\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis ortonormal untuk R^3 dengan hasil kali dalam Euclidis. Nyatakan vektor u = (1, 1, 1) sebagai kombinasi linear vektor-vektor S.

Pemecahan :

$\langle u, v_1\rangle = 1$ $\langle u, v_2\rangle = -\frac{1}{5}$ $\langle u, v_3\rangle = \frac{7}{5}$

Sehingga menurut teorema 23

Yakni, $u = v_1 - \frac{1}{5} v_2 + \frac{7}{5} v_3$

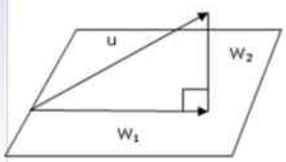
$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

Jika $S = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ adalah himpunan ortogonal vektor taknol dalam ruang hasil kali dalam, maka S bebas linear.

Contoh :

$v_1 = (0, 1, 0)$ $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ dan $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ membentuk himpunan ortonormal terhadap hasil kali dalam Euclidis pada R^3. Menurut Teorema 24, vektor-vektor ini membentuk himpunan bebas linear. Maka, karena R^3 berdimensi tiga, $S=\{v_1, v_2, v_3\}$adalah basis ortonormal untuk R^3

Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam dan {v_1, v_2, ...v_r} adalah himpunan ortonormal dari vektor-vektor V. Jika W menyatakan ruang yang direntang oleh v_1, v_2,.....v_r maka setiap vektor u dalam V dapat diungkapkan dalam bentuk U = $w_1 + w_2$ Dimana w_1 terletek di W dan w_2 ortogonal terhadap W dengan memisalkan $W_1 = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_r\rangle v_r$ dan $W_2 = u - \langle u, v_1\rangle v_1 - \langle u, v_2\rangle v_2 - \cdots - \langle u, v_r\rangle v_r$



proy_w u = <u, v_1> v_1 + <u,v_2> v_2 + ...+ <u,v_r> v_r

(proyeksi ortogonal u pada W)

U - proy_w u = u - <u, v_1> v_1 - <u,v_2> v_2 - ....- <u,v_r> v_r

(komponen u rtogonal terhadap W)

Contoh :

Misalkan R_3 mempunyai hasil kali dalam Euclidis, dan misalkan Wadalah subruang yang direntang oleh vektor-vektor ortonormal v_1 = (0, 1, 0) dan $v_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$. proyeksi ortogonal u = (1, 1, 1) pada W adalah

proy_w u = <u, v_1> v_1 + <u,v_2> v_2

= (1) (0, 1, 0) + $(-\frac{1}{5})(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$

= $(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25})$

Komponen u yang ortogonal terhadap W adalah

U - proy_w u = u - <u, v_1> v_1 - <u,v_2> v_2

= (1, 1,1) - $(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25})$

= $(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25})$

Setiap ruang hasil kali dalam berdimensi berhingga taknol mempunyai sebuah basis ortonormal.

PROSES GRAM-SCHMIDT

- LANGKAH 1

  Misalkan mempunyai norma 1.

- LANGKAH 2

$$v_2 = \frac{u_2 - proy_{w_1 u_2}}{\left\| u_2 - proy_{w_1 u_2} \right\|} = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\left\| u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \right\|}$$

- LANGKAH 3

$$v_3 = \frac{u_3 - proy_{w_2 u_3}}{\left\| u_3 - proy_{w_2 u_3} \right\|} = \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\left\| u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 \right\|}$$

- LANGKAH 4

$$v_4 = \frac{u_4 - proy_{w_3 u_4}}{\left\| u_4 - proy_{w_3 u_4} \right\|}$$

$$= \frac{u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3}{\left\| u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3 \right\|}$$

Contoh:

Tinjaulah ruang vektor R^3 dengan hasil kali dalam Euclidis. Terapkanlah proses Gram-Schimdt untuk mentransformasikan basis $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1)$ ke dalam basis ortonormal.

Langkah 1. $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Langkah 3. $u_3 - proy_{w_2 u_3} = u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Maka,

$$v_3 = \frac{u_3 - proy_{w_2 u_3}}{\|u_3 - proy_{w_2 u_3}\|} = \sqrt{2}\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Jadi, $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), v_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Membentuk basis ortonormal untuk R^3 .

BAB 5 TRANSFORMASI LINEAR

FORUM DISKUSI ?

Apakah fungsi F (x,y) = 2+3x-y merupakan transformasi linear?

TEMUKAN DENGAN CARAMU SENDIRI !!!!

A. Definisi Transformasi Linear

Transformasi linear yaitu pemetaan dari suatu ruang vector ke ruang vector yang lain yang memenuhi aksioma kelinearan.

Definisi 1.1

Jika $F:V \rightarrow W$ adalah sebuah fungsi (pemetaan) dari ruang vector V ke dalam ruang vector W, maka Fdisebut **transformasi linear**, jika memenuhi 2 aksioma berikut :

a. $F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + (\mathbf{v})$, untuk setiap **u** dan **v** di V
b. $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$, untuk setiap u di V dan setiap k scalar ($k \in R$).

Kedua aksioma di atas dapat disingkat menjadi satu aksioma berikut :

$F(k\mathbf{u} + l\mathbf{v}) = kF(\mathbf{u}) + lF(\mathbf{v})$, untuk setiap **u** dan **v** di V dan untuk setiap k dan l scalar.

Definisi 1.2

Transformasi linear dari ruang vector ke ruang vector yang sama disebut operator linear, $T: V \rightarrow V$

1. Apakah fungsi F(x,y) = (x,y + y,x-y) merupakan transformasi linear?
   Penyelesaian:

Fungsi di atasmerupakan fungsi dari R^2 ke R^3. Untukmenunjukkan F transformasi linear, ambil R^2 yang berbentuk umum sehingga memenuhi aksioma kelinearan.

a) Ambil **u**,**v** $\in R^2$,misalnya **u** = (x_1,y_1) dan **v** = (x_2,y_2) dengan mengingat aturan penjumlahan vector u + v = (x_1+x_2,y_1+y_2), maka nilai fungsi **u** + **v** adalah

$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (x_1+x_2, (x_1+x_2) + (y_1+y_2), (x_1+x_2) - (y_1+y_2))$

{definisi fungsi}

$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (x_1+x_2, x_1+x_2 + y_1+y_2, x_1+x_2 - y_1 - y_2)$

{sifat distributif bilangan real}

$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (x_1+x_2, x_1+y_1 + x_2+ y_2, x_1 - y_1+ (x_2-y_2)$

{sifat asosiatif bilangan real}

$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (x_1,x_1+ y_1,x_1 - y_1) + (x_2,x_2+ y_2,x_2 - y_2)$

{aturan penjumlahan vector}

$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$

b) Ambil **u** $\in R^2$ dan ambil k scalar dengan mengingat perkalian vector dengan scalar, yaitu $k\mathbf{u} = (kx_1,ky_1)$, maka nilai $k\mathbf{u}$ adalah

$F(k\mathbf{u}) =(kx_1,kx_1 + ky_1,kx_1- ky_1)$

{definisi fungsi}

$F(k\mathbf{u}) =(kx_1,k(x_1 + y_1), k(x_1- y_1))$

{sifat distributif bilangan real}

$F(k\mathbf{u}) = k(x_1,x_2 + y_1,x_1- y_1)$

{aturan perkalian vector dengan scalar}

$F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$

Jadi, fungsi $F(x,y) = (x,y + y,x - y)$ merupakan transformasi linear karena telah memenuhi 2 aksioma kelinearan.

2. Apakah fungsi $F(x,y) = 2+3x-y$ merupakan transformasi linear?

   Penyelesaian:

   Contoh penyangkal : **u** = (2,3) dan $k = 5$

   Maka, $F(k\mathbf{u})$ $= F(5(2,3))$
   $= F(10,15)$
   $= 2+3.10-15$
   $= 17$

   Tetapi, $kF(\mathbf{u})$ $= 5F(2,3)$
   $=5(2+3.2-3)$
   $=5(5)$
   $= 25$

   Karena $F(k\mathbf{u}) \neq kF(\mathbf{u})$, maka fungsi $F(x,y) = 2+3x-y$ bukan transformasi linear.

3. Transformasi Matriks / Transformasi Perkalian Matriks

Misalkan A matriks berordo m x n yang tetap. Jika menggunakan notasi matriks untuk vector di R^n dan R^m, maka didefinisikan sebuah fungsi $T:R^n \rightarrow R^m$, dengan $T(\mathrm{x}) = Ax$, dimana $\mathrm{x} \in R^n$.

1) Misalkan $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in R^n$ dengan menggunakan sifat-sifat perkalian matriks maka :
   $T(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2) = A(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)$
   $T(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2) = \mathrm{Ax}_1+\mathrm{Ax}_2$
   $T(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2) = T(\mathrm{x}_1) + \mathrm{T}(\mathrm{x}_2)$
2) Misalkan $\mathrm{x}_1 \in R^n$ dan k scalar,maka :
   $T\,(k\mathrm{x}_1) = A\,(k\mathrm{x}_1)$
   $T\,(k\mathrm{x}_1) = k\,(\mathrm{Ax}_1)$
   $T\,(k\mathrm{x}_1) = kT\,(\mathrm{x}_1)$

Transformasi linear yang demikian disebut transformasi matriks atau transformasi perkalian matriks. Setiap transformasi linear dari R^n ke R^m dapat dinyatakan sebagai transformasi matriks.

4. Fungsi Nol
   Fungsi yang memetakan setiap vector di V ke vector nol, $T:V \rightarrow W$ yang didefinisikan oleh $T(\mathbf{v}) = 0$, dimana $\forall \mathrm{v} \in V$.
   Pembuktian bahwa T linear :
   1) Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka:
      $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0$ {definisi fungsi}
      $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0 + 0$ {sifat vector nol }
      $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\,(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ {definisi fungsi}
   2) Ambil $\mathbf{v} \in V$, maka :
      $T(k\mathrm{v}) = 0$ {definisi fungsi}
      $T(k\mathrm{v}) = k.0$ {sifat perkalian vector nol dengan skalar}
      $T(k\mathrm{v}) = kT(\mathrm{v})$ { definisi fungsi}
      Jadi, fungsi nol termasuk transformasi linear.

5. Fungsi Identitas
   Fungsi yang memetakan setiap vector di V ke dirinya sendiri, $T,V \rightarrow V$ yang didefinisikan oleh $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, dimana $\forall \mathbf{v} \in V$ disebut sebagai operator identitas pada V.
   Pembuktian bahwa T linear:
   1) Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,maka :
      $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$
      $= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
   2) Ambil $\mathbf{v} \in V$ dan k scalar, maka :
      $T(k\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$
      $= kT\,(\mathbf{v})$
      Jadi fungsi identitas termasuk transformasi linear.

6. Fungsi R^n ke R dengan rumus $T(x) = x^t Ax$ untuk suatu matriks tetap A_{nxn} yang simetri disebut **fungsi kuadrat**. Apakah fungsi kuadrat termasuk transformasi linear?

Penyelesaian:

Contoh penyangkal: $x = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}$; $k = 5$

Sehingga, $T(x) = x^t Ax$

$= [0\ 1]\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$= [1 - 3]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$= -3$

1) $T(kx) = T(5)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$= T\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$

$=[0\ 5]\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$

$=[5\ \ -15]\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$

$= -75$

2) $kT(x) = 5\ T(x)$

$= 5\ (-3)$

$= -15$

Jadi, fungsi T di atas bukan transformasi linear karena $T(kx) \neq kT(x)$.

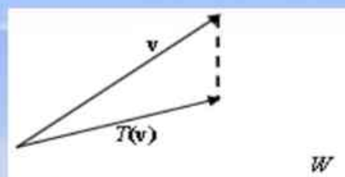
7. Proyeksi Ortogonal

Proyeksi orthogonal dapat didefinisikan pada ruang hasil kali dalam. Misalkan V adalah sebuah ruang hasilkali dalam ruang dan W adalah sebuah subruang V berdimensi berhingga, yang mempunyai $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ sebagai basis ortonormal sebarang untuk W.

Misalkan $T: V \rightarrow W$ adalah fungsi yang memetakan v di V ke dalam proyeksi ortogonalnya yang terletak pada W, yakni :

$T(\mathbf{v}) = \text{proj}_w \mathbf{v}$

$=(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_r)\mathbf{w}_r$



Lihat gambar..!!

Pemetaan T dinamakan proyeksi orthogonal dari V pada W. Linearitasnya didapatkan dari sifat-sifat dasar hasilkali dalam. Misalnya:

$T <\mathbf{u}+\mathbf{v}> \quad = <\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}_1>\mathbf{w}_1 + <\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}_2>\mathbf{w}_2 + \ldots + <\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}_r>\mathbf{w}_r$

$= (<\mathbf{u}, \mathbf{w}_1>\mathbf{w}_1 + <\mathbf{u}, \mathbf{w}_2>\mathbf{w}_2 + \ldots + <\mathbf{u}, \mathbf{w}_r>\mathbf{w}_r + <\mathbf{v}, \mathbf{w}_1>\mathbf{w}_1 + <\mathbf{v}, \mathbf{w}_2>\mathbf{w}_2 + \ldots + <\mathbf{v}, \mathbf{w}_r>\mathbf{w}_r$

$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Demikian pula, $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$.

8. Transformasi Linear dari Ruang V ke R^n

   Misalkan, $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n\}$ adalah sebuah basis untuk suatu ruang vector V berdimensin, $(\mathbf{v}) = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots \mathbf{k}_n)$ adalah vetorkoordinat, dan vector v pada V relative terhadap S, maka :

   $v = k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_n w_n$

   Definisikan $T{:}V \rightarrow R$ sebagai fungsi yang memetakan v ke vector koordinatnya relative terhadap S. jelasnya, $T(v) = (v)s = (k_1, k_2, \ldots k_n)$

   Fungsi T adalah sebuah transformasi linear. Untuk membuktikan hal ini, misalkan **u** dan **v** adalah vector-vektor pada V.

   $\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \ldots + c_n\mathbf{w}_n$ dan $\mathbf{v} = d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + \ldots + d_n\mathbf{w}_n$

   Dengan demikian, $(\mathbf{u})s = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ dan $(\mathbf{v})s = (d_1, d_2, \ldots d_n)$

   Akan tetapi,

   $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1, d_1)\mathbf{w}_1 + (c_2, d_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (c_n, d_n)\mathbf{w}_n$

   $ku = (kc_1)\mathbf{w}_1 + (kc_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (kc_n)\mathbf{w}_n$

sehingga,

$(\mathbf{u} + \mathbf{v})s = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n)$

$(k\mathbf{u})s = (kc_1, kc_2, \ldots, kc_n)$

Dengan demikian, $(\mathbf{u} + \mathbf{v})s = (\mathbf{u})s + (\mathbf{v})s$ dan $(k\mathbf{u})s = (k\mathbf{u})s$

Dengan menyatakan kedua persamaan ini dalam bentuk T akan menghasilkan :

$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ dan $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$, yang menunjukkan bahwa T adalah sebuah transformasi linear.

Perhitungan-perhitungan pada contoh di atas dapat dapat juga dilakukan dengan menggunakan matriks koordinat, bukan dengan menggukan vector koordinat, yaitu :

$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]s = [\mathbf{u}]s + [\mathbf{v}]$ dan $[k\mathbf{u}]s = k[\mathbf{u}]s$

9. Transformasi Linear dari P_n ke P_{n+1}
   Misalkan, $p = p$ (x) = $c_0 + c_1x + \ldots + c_nx_n$ adalah sebuah polynomial pada P_n dan fungsi $T{:}P_n \rightarrow P_{n+1}$ didefinisikan sebagai:

$$T(p) = T(p(\mathrm{x})) = \mathrm{x}p(\mathrm{x}) = c_0\mathrm{x} + c_1\mathrm{x}^2 + \ldots + c_n\mathrm{x}^{n+1}$$

   Fungsi T adalah sebuah transformasi linear, karena untuk sebarang k scalar dari polynomial sebarang ρ_1 dan ρ_2 pada P_n, kita memperoleh :

   1) $T(p_1 + p_2) = T(p_1(x) + p_2(x))$
   $= x(p_1(x) + p_2(x))$
   $= xp_1(x) + p_2(x)$
   $= T(p_1) + T(p_2)$

   2) $T(kp) = T(kp(x))$
   $= x(kp(x))$
   $= k(xp(x))$
   $= kT(p)$

10. Transformasi linear dari P_n ke R^n
   Didefinisikan fungsi $T{:}P_2 \rightarrow R^3$ dengan rumus $T(a + b + cx^2) = \begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$
   Apakah fugsi T yang didefinisikan termasuk transformasi linear?
   Penyelesaian:
   1) Ambil $p = p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ *dan* $q = q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2$ anggota P_2, maka
   $P + q = p(x) + q(x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x_2$
   Berarti,
   $$T(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (a1 + a2) + (b1 + b2) + (c1 + c2) \\ (\mathrm{a1} + \mathrm{a2}) - (\mathrm{b1} + \mathrm{b2}) - (\mathrm{c1} + \mathrm{c2}) \\ (\mathrm{b1} + \mathrm{b2}) + (\mathrm{c1} + \mathrm{c2}) \end{bmatrix}$$
   $$T(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (a1 + b1 + c1) + (a2 + b2 + c2) \\ (a1 - b1 - c1) + (a2 - b2 - c2) \\ (b1 + c1) + (b2 + c2) \end{bmatrix}$$
   $T(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + T(\mathbf{q})$
   2) Ambil $p = p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ anggota P_2 dan k scalar, maka
   $kp = ka_1 + kb_1x + kc_1x^2$
   berarti,

$$T(k\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} ka1 + kb1 + kc1 \\ ka1 - kb1 - kc1 \\ kb1 + kc1 \end{bmatrix}$$

$$T(k\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} k\,(a1 + b1 + c1\,) \\ k\,(\,a1 - b1 - c1) \\ k\,(b1 + c1\,) \end{bmatrix}$$

$$T(k\mathbf{p}) = k\begin{bmatrix} a1 + b1 + c1 \\ a1 + b1 + c1 \\ b1 + c1 \end{bmatrix}$$

$$T(k\mathbf{p}) = kT(\mathbf{p})$$

Jadi, fungsi yang didefinisikan di atas termasuk transformasi linear.

11. Transformasi yang tidak linear

    Misalkan $T{:}M_{nn}\rightarrow R$ adalah transformasi yang memetakan sebuah matriks n x n ke determinannya, yaitu: $T(A) = \det(A)$

    Jika n > 1, maka transformasi ini tidak memenuhi kedua sifat yang dipersyaratkan untuk sebuah transformasi linear. Dapat ditunjukkan bahwa :

    $\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$ secara umum. Selanjutnya, $\det(kA) = k^n\det(A)$, sehingga $\det(kA) \neq k\det(A)$ secara umum. Dengan demikian, T bukan sebuah transformasi linier.

B. Sifat-sifat Transformasi Linear

Jika $T{:}V\rightarrow W$ adalah sebuah transformasi linear, maka untuk vector v_1 dan v_2 sebarang pada V, serta saklar k_1 dan k_2 sebarang,kita peroleh:

$$T(k_1v_1 + k_2v_2) = T(k_1v_1) + T(\,k_2v_2) = k_1\,T(v_1) + k_2\,T(v_2)$$

Secara lebih umum, jika $v_1, v_2,\ldots,v_n$ adalah vector-vektor pada V, dan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah scalar, maka :

$$T(k_1v_1{+}k_2v_2{+}\ldots{+}k_nv_n) = k_1T(v_1){+}\,k_2T(v_2){+}\ldots{+}k_nT(v_n)\ldots\ldots(1)$$

Rumus (1) terkadang diuraikan dengan sebutan transformasi linear yang mempertahankan kombinasi linear. Teorema berikut ini, mencantumkan tiga sifat dasar yang umum untuk semua transformasi linear.

Teorema 1.

Jika $T{:}V\rightarrow W$ adalah sebuah transformasi linear, maka:

a. $T(0_v) = 0_w$, 0_v = *vector nol pada ruang V*
b. $T(-v) = -T(v)$, *untuk setiap v di V*
c. $T(v-w) = T(v) - T(w)$. *untuk setiap v dan w di V*

Bukti :

a. Misalkan **v** adalah vector sebarang pada V, maka diperoleh:
$0 = 0.\ v$, sehingga $T(0) = T(0v)$ dengan aksioma transformasi linear, maka skalar nol dapat dikeluarkan yang berakibat $T(0\mathbf{v}) = \mathbf{0}T(\mathbf{v}) = 0$.
Jadi, $T(0_v) = 0_w$, dimana 0_v adalah vektor nol diruang vektor V dan 0_w adalah vektor nol di ruang vektor W.

b. Vektor minus merupakan perkalian antara vektor dengan scalar minus satu atau $-v = (-1)v$, sehingga $T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v})$

$$T(-\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v})$$

$$T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$$

c. Akibat dari (b) jelas bahwa:
$\mathbf{v}\text{-}\mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$
$T(\mathbf{v}\text{-}\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}+(-1)\mathbf{w})$
$T(\mathbf{v}\text{-}\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$

C. Kernel Dan Jangkauan

Definisi 1.3

Misalkan V dan W merupakan ruang vektor dan jika $T{:}V \rightarrow W$ adalah sebuah transformasi linear.

- Kernel atau ruang nol dari T adalah himpunan semua vektor di V yang dipetakan oleh T ke 0. Himpunan tersebut dinyatakan dengan ker(T) atau ker(T) = $\{x \in V | T(x) = 0\}$
- Jangkauan atau range dari T adalah himpunan semua vektor pada W yang merupakan bayangan dibawah T dari paling sedikit satu vektor di V. Himpunan tersebut dinyatakan dengan $R(T)$ atau $R(T) = \{y \in W | \exists\ x \in V$, sehingga $y = T(x)\}$.

Sifat-Sifat Kernel Dan Jangkauan

Teorema 2.

Jika $T{:}V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, maka:

a. Kernel dari T adalah sebuah subruang dari V
b. Jangkauan dari T adalah sebuah subruang dari W

Bukti :

a. Untuk meunjukkan bahwa ker(T) adalah subruang, maka kita harus menunjukkan bahwa ker(T) tersebut tertutup di bawah pertambahan dan perkalian scalar. Misalkan, v_1 dan v_2 adalah vektor-vektor dalam ker(T), dan misalkan k adalah sebarang scalar. Maka

   $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

   $= 0 + 0 = 0$

   Sehingga $(v_1 + v_2)$ berada dalam Ker(T).

   Juga $T(kv_1) = kT(v_1)$

   $= k0 = 0$

   Sehingga kv_1 berada dalam Ker(T)

b. Misalkan w_1 dan w_2 adalah vektor-vektor dalam jangkauan T.untuk membuktikannya maka harus menunjukkan bahwa $w_1 + w_2$ dan kw_1 berada dalam jangkauan T untuk sebarang k skalar. Jelasnya, kita harus menemukan vektor a dan b di V, sehingga

   $T(a) = w_1 + w_2$ dan $T(b) = kw_1$

   Karena w_1 dan w_2 berada dalam jangkauan T, maka terdapat vektor a_1 dan a_2 di V, sehingga $T(a_1) = w_1$ dan $T(a_2) = w_2$. Jika $a = a_1 + a_2$ dan $b = ka_1$. Maka

   $T(a) = T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2) = w_1 + w_2$

   Dan

   $T(b) = T(ka_1) = kT(a_1) = kw_1$

   Yang melengkapkan pembuktian ini.

Definisi 1.4

Jika $T:V \to W$ adalah transformasi linear, maka dimensi kernel dari T dinamakan nulitas T dan dinotasikan dengan nulitas(T). sedangkan, dimensi jangkauan dari T dinamakan rank T dan dinotasikan dengan rank(T).

Teorema 3.

Jika $T:V \to W$ adalah transformasi linear dari ruang vektor V yang berdimensi n kepada sebuah ruang vektor W, maka :

$$\text{Rank}(T) + \text{nulitas}(T) = n$$

Dengan kata lain, teorema ini menyatakan bahwa untuk transformasi linier rank + nulitas sama dengan dimensi dari domain yang bersangkutan.

Teorema 4.

Jika A adalah matriks m x n maka dimensi ruang pemecahan dari $Ax = 0$ adalah $n - \text{rank}(A)$.

Jelasnya teorema ini menyatakan bahwa dimensi ruang pemecahan $Ax = 0$ sama dengan jumlah kolom A kurang rank(A).

Pernyataan.

Karena sistem linear homogeny $Ax = 0$ harus konsisten, bahwa rank matriks A sama dengan jumlah parameter dalam pemecahan $Ax = 0$. Dengan menggabungkan hasil ini dengan teorema 4, selanjutnya dengan mengacu pada ruang pemecahan $Ax = 0$ akan sama dengan jumlah kolom A kurang jumlah parameter dalam pemecahan $Ax = 0$.

1. Kernel dan jangkauan transformasi nol
   Jika $T{:}V \rightarrow W$ adalah transformasi nol atau ditulis $T(\text{u}) = 0$, $\forall \text{u} \in V$, maka Ker(T) adalah ruang V itu sendiri. Sedangkan $R(T)$ hanyalah berisi vektor nol saja atau $R(T) = \{0\}$.

Bukti :

Jika $T{:}V \rightarrow W$ transformasi linear. Maka Ker(T) merupakan subruang V dan $R(T)$ subruang W. Ker(T) $\subseteq V$ dan Ker(T) $\neq \emptyset$ karena ada $0 \in$ Ker (T) yang memenuhi $T(0) = 0$.

Misalkan u, v $\in$ Ker(T) dan k,l skalar maka dipenuhi $T(\text{u}) = 0$, dan $T(\text{v}) = 0$. Sedangkan,

$T(k\text{u} + l\text{v}) = kT(\text{u}) + kT(\text{v})$ {karena T transformasi linear}

$T(k\text{u} + l\text{v}) = k0 + l0)$ {karena u dan v anggota Ker(T)}

$T(k\text{u} + l\text{v}) = 0$ {sifat vektor nol}

Jadi, $k\text{u} + l\text{v} \in$ Ker(T). dengan demikian, Ker(T) merupakan subruang dari V. sementara itu $R(T)$ juga ruang vektor karena $R(T) \subseteq W$ dan $R(T)$ subruang vektor dari ruang vektor W.

Misalkan u, v $\in R(T)$ dan k,l skalar maka ada x_1 sehingga $T(x_1) = \text{u}$, dan ada x_2 sehingga $T(x_2) = \text{v}$,

$K\text{u} + l\text{v} = kT\,(x_1) + lT\,(x_2)$ {karena u dan v anggota $R(T)$}

$K\text{u} + l\text{v} = T\,(kx_1) + T\,(kx_2)$ {karena T transformasi linear}

$K\text{u} + l\text{v} = T\,(kx_1 + kx_2)$ {karena T transformasi linear}

Jadi, $k\text{u} + l\text{v}$ anggota $R(T)$. dengan demikian, $R(T)$ subruang W. jadi, jika $T{:}V \rightarrow W$ merupakan transformasi linear maka ker(T) merupakan subruang V dan $R(T)$ merupakan subruang dari W.

2. Kernel dan jangkauan transformasi identitas

Misalkan $T:V\to V$ adalah operator identias, karena $T(\mathrm{v}) = \mathrm{v}$ untuk semua vektor pada V, setiap vektor V adalah bayangan dari suatu vektor, yaitu bayangan dirinya sendiri. Sehingga, $R(T) = V$, karena satu-satunya vektor yang dipetakan T ke 0 adalah 0, maka $\mathrm{Ker}(T) = V$.

3. Kernel dan jangkauan sebuah transformasi matriks

Jika $T_A : R^n \to R^m$ adalah perkalian dengan sebuah matriks A berukuran $m \times n$, maka dari definisi diatas dapat diketahui bahwa kernel dari T_A adalah ruang nol dari matriks A dan jangkuan dari T_A adalah ruang kolom dari matriks A.

Misal, $T:R^n \to R^m$ adalah perkalian oleh

A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots a1n \\ a21 & a22 & \dots a2n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ am1 & am2 & \dots amn \end{bmatrix}$ yang berukuran $m \times n$.

- Kernel T terdiri dari semua pemecahan dari $Ax = 0$.

  Jadi, x = $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix}$ yang merupkan vektor pemecah dari sistem

  homogen $A = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

- Jangakauan T terdiri dari semua vektor b, sehingga $Ax = \mathrm{b}$ konsisten.

  Jangkauan T adalah ruang kolom dari matriks A.

  Jadi, b = $\begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{bmatrix}$ sehingga sistem A = $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{bmatrix}$ konsisten.

Contoh soal..!!!!

Jika sebuah transformasi linear dirumuskan T $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b - c + d \\ 2b - c \\ a + d \\ 0 \end{bmatrix}$

Tentukan : a. $\mathrm{Ker}(T)$

b. Basis dan nulitas

c. $R(T)$

d. Basis dan $\mathrm{Rank}(T)$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard dan Rorrer. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi (Edisi Kedelapan)*. Terjemahan oleh Refina Indriasari dan Irzam Harmen. Jakarta : Erlangga.

Anton, Howard. 2009. *Dasar-dasar Aljabar Linear (Jilid 1)*. Tangerang : Binarupa Aksara.

Ayres, Frank. 1985. *Seri Buku Schaum, Matriks*. Jakarta : Erlangga.

Finizio, N dan G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Moderen*. Terjemahan oleh Dra. Widiarti Santoso. Jakarta : Erlangga.

Gazali, Wikaria. 205. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Leon, J. Steven. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya, Edisi Kelima*. Jakarta : Erlangga.

Purcell, Edwin J, Dale Verberg, dan Steven E. Rigdon. 2004. *Kalkulus Jilid 1 (Edisi Kedelapan)*. Jakarta : Erlangga.

Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN 978-602-0725-93-2
9 786020 725932

HAKI buku

ORIGINALITY REPORT

11%	12%	2%	4%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

1%

★ Submitted to Sim University

Student Paper

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 40 words
Exclude bibliography	On		